Uniformisation de l'espace des feuilles de certains feuilletages de codimension 1.

Frédéric Touzet

UNIFORMISATION DE L'ESPACE DES FEUILLES DE CERTAINS FEUILLETAGES DE CODIMENSION UN

FRÉDÉRIC TOUZET[1]

Résumé. Dans cet article, nous étudions, sur des variétés Kähler compactes, les feuilletages holomorphes (éventuellement singuliers) dont le fibré conormal est pseudo-effectif. En utilisant la notion de courant à singularités minimales, nous montrons que l'on peut munir canoniquement l'espace des feuilles d'une métrique à courbure constante négative ou nulle dont les éventuelles dégéneres-cences sont localisés le long d'une hypersurface invariante "rigidement plongée" dans la variété.

Abstract. This paper deals with codimension one (may be singular) foliations on compact Kälher manifolds whose conormal bundle is assumed to be pseudo-effective. Using currents with minimal singularities, we show that one can endow the space of leaves with a metric of constant non positive curvature wich may degenerate on a "rigidly" embedded invariant hypersurface.

1. Notations et rappels

Soit M une variété kählerienne compacte et connexe.

Une *distribution holomorphe de codimension 1* (éventuellement singulière) sur M correspond à la donnée d'une section ω *holomorphe non triviale* de $\Omega^1(M)\otimes L$ où L est un fibré en droites holomorphe. D'un point de vue dual, on peut également définir un tel objet par un sous faisceau saturé $\mathcal{F}$ de rang $n-1$ ($n = Dim_{\mathbb{C}}M$) de TM (en l'occurence, le sous faisceau annulateur de ω).

Le théorème suivant, dû à Jean-Pierre Demailly précise les hypothèses "minimales" que l'on peut faire sur le fibré L pour que cette distribution définisse un feuilletage holomorphe de codimension 1.

Théorème 1.1. [8] *Soit une distribution holomorphe singulière donnée comme ci-dessus ; supposons que le dual L^* du fibré L soit pseudo-effectif ; alors la forme ω est intégrable.*

Rappelons à cet effet qu'une classe de cohomologie $\alpha \in H^{1,1}(M,\mathbb{R})$ est dite *pseudo-effective* si α peut être représentée par un courant positif fermé de bidegré $(1,1)$.

On dira alors qu'un fibré en droites holomorphe L est *pseudo-effectif* si $c_1(L)$ est pseudo-effective ou,de façon équivalente, si l'on peut implanter sur L une métrique $h(x,v) = |v|^2 e^{-2\varphi(x)}$ où le poids local φ est une fonction plurisousharmonique (*psh* pour faire bref). Le courant T est alors égal à la forme de courbure d'une telle métrique (éventuellement singulière) suivant la formule :

$$T = \frac{-i}{2\pi}\partial\overline{\partial}\log h = \frac{i}{\pi}\partial\overline{\partial}\varphi. \tag{1}$$

[1] IRMAR, Campus de Beaulieu 35042 Rennes Cedex, France, frederic.touzet@univ-rennes1.fr.

Dans l'énoncé du théorème 1.1, on retrouve un résultat classique lorsque $L^* = \mathcal{O}(D)$ où D est un diviseur effectif :

Théorème 1.2. *Toute forme holomorphe sur une variété kälherienne compacte est fermée (donc en particulier intégrable).*

Dans ce qui suit, on se propose de préciser la structure des distributions (*a posteriori* intégrables) vérifiant les hypothèses du théorème de Demailly . Soit $s \in H^0(M, \Omega^1(M) \otimes L) \setminus \{0\}$ représentant une telle distribution. Puisque la somme d'une classe effective et d'une classe pseudo-effective reste pseudo-effective, on peut toujours se ramener au cas où s est régulière en codimension 1, i.e : son lieu d'annulation est un sous-ensemble analytique de codimension ≥ 2 qui coïncide alors avec le lieu singulier $Sing\ \mathcal{F}$ de la distribution. Le fibré L représente alors le *fibré normal* $N_{\mathcal{F}}$ de la distribution et, par hypothèse, son dual, le fibré conormal ${N_{\mathcal{F}}}^*$, est pseudo-effectif.

Dans la suite il sera également commode de regarder alternativement ${N_{\mathcal{F}}}^*$ comme le sous faisceau inversible de $\Omega^1(M)$ dont les sections locales sont les formes s'annulant en restriction à la distribution.

Introduisons maintenant quelques notations.

Si T es un $(1,1)$ courant positif fermé, on désignera par $\{T\}$ sa classe de cohomologie dans $H^{1,1}(M, \mathbb{R})$.

Soit $d = \sum_{D \in Div(M)} \lambda_D D$ un élément de $Div(M) \otimes \mathbb{R}$ auquel on peut associer le courant d'intégration $T_d = \sum_{D \in \mathbb{R}} \lambda_D [D]$.

On posera alors $\{d\} := \{T_d\}$.

Donnons une formulation plus précise du théorème 1.1.

Soit $T = \frac{i}{\pi}\partial\overline{\partial}\varphi$ un courant positif dont la classe de cohomologie $\{T\}$ dans le groupe de Néron-Séveri réel est égale à $c_1({N_{\mathcal{F}}}^*)$.

Ceci permet d'exhiber une $(1,1)$ forme positive globalement définie

$$\eta_T = \frac{i}{\pi} e^{2\varphi} \omega \wedge \overline{\omega} \tag{2}$$

à coefficients L^∞_{loc} où la 1 forme holomorphe ω est un générateur local de $\mathcal{F}$. Il est facile de constater que η_T est bien définie à multiplication près par un réel positif.

L'intégrabilité de $\mathcal{F}$ résulte alors immédiatement de l'égalité suivante, établie dans [8] :

$$d\omega = -\partial\varphi \wedge \omega \tag{3}$$

et qui entraîne les relations

$$d\eta_T = 0 \tag{4}$$

(au sens des courants) et

$$T \wedge \omega = 0 \tag{5}$$

dont nous ferons usage par la suite.

Pour fixer les idées, précisons comment on peut établir la relation (3) en admettant l'intégrabilité de $\mathcal{F}$ pour laquelle on renvoie le lecteur à [8] ou encore [5].

Soit θ une forme de Kähler sur M. Considérons le courant $\Omega = i\partial\overline{\partial}(\eta_T \wedge \theta^{n-2})$ où n est la dimension complexe de M. Au voisinage d'un point non situé dans l'ensemble singulier $\mathcal{S}ing\ \mathcal{F}$ du feuilletage, on peut écrire en coordonnées holomorphes locales, $\omega = f dz$ où f est holomorphe inversible. Sur $U = M \setminus \mathcal{S}$, on obtient donc que

$$\Omega = -\partial\overline{\partial}(e^{2\varphi+2\log|f|})dz \wedge d\overline{z}$$

est positif (l'exponentielle d'une fonction *psh* est *psh*). Par ailleurs, $i\eta_T \wedge \theta^{n-2}$ est un courant positif à coefficients localement bornés; il est donc dominé par $c\theta^{n-1}$ pour $c > 0$ assez grand. En utilisant alors le principal résultat de [1] et le fait que $Sing\ \mathcal{F}$ est de codimension au plus deux, on conclut que Ω est une mesure *positive* sur M tout entier et que finalement $\Omega = 0$ par exactitude.

On peut donc en déduire qu'au voisinage d'un point régulier, $e^{2\varphi+2\log|f|}$ est *pluriharmonique* dans les feuilles et finalement constante car l'exponentielle d'une fonction *psh* est pluriharmonique si et seulement si cette fonction est *constante*.

L'identité (3) est donc vérifiée sur le complémentaire de $Sing\ \mathcal{F}$. En appliquant le $\overline{\partial}$, on obtient $\partial\overline{\partial}\varphi \wedge \omega = 0$ sur $M \setminus Sing\ \mathcal{F}$ et donc sur M en utilisant que $i\partial\overline{\partial}\varphi$ est positif et codim $Sing\ \mathcal{F} \geq 2$. Par hypoellipticité du $\overline{\partial}$, on peut alors conclure que (3) est vraie sur M.

Avant d'énoncer notre principal résultat, il nous semble utile de rappeler les notions de courants à singularités minimales, de courants invariants par un feuilletage et de faire le lien entre ces différents objets.

2. Courants invariants par holonomie et décomposition de Zariski

Définition 2.1. *Soit $\mathcal{F}$ un feuilletage holomorphe de codimension 1 (éventuellement singulier) sur une variété M complexe et T un courant positif fermé de bidegré $(1,1)$ défini sur M. On dira que T est $\mathcal{F}$ invariant (ou invariant par holonomie de $\mathcal{F}$) si au voisinage de tout point de M, on a*

$$T \wedge \omega = 0$$

où ω désigne une 1 forme holomorphe définissant localement le feuilletage.

Au voisinage d'un point régulier du feuilletage où celui-ci est décrit par l'équation $\{dz = 0\}$, un tel courant s'exprime donc sous la forme $T = \sqrt{-1}a(z)dz \wedge d\overline{z}$ où a est une mesure positive.

Dans la mesure où nous cherchons à produire des métriques tranverses au feuilletage invariante par holonomie à courbure constante (dans un sens qui reste à préciser) et présentant la plus forte régularité possible, il est assez naturel de considérer la classe plus restreinte des courants à singularités minimales dont nous rappelons maintenant la définition (voir par exemple [2]).

Soit M une variété kählerienne compacte et γ une $(1,1)$ forme fermée lisse. Dans une classe de cohomologie fixée $\alpha \in H^{1,1}(M, \mathbb{R})$, considérons l'ensemble $\alpha[-\gamma]$ des $(1,1)$ courants fermés T tels que $T \geq -\gamma$. On a donc

$$T = \beta + i\partial\overline{\partial}\varphi \tag{6}$$

où β est une $(1,1)$ forme fermée *lisse* telle $\{\beta\} = \{T\}$ et φ une fonction *quasi-plurisousharmonique*, c'est-à-dire qui s'exprime localement comme la somme d'une fonction *psh* et d'une fonction lisse. Ceci permet de définir, selon la formule habituelle (voir [2]), le nombre de Lelong $\nu(T,x)$ de T en n'importe quel point $x \in M$ et le nombre de Lelong générique $\nu(T,Y)$ sur un sous-ensemble analytique Y.

Soient maintenant deux courants $T_1, T_2 \in \alpha[-\gamma]$. on peut donc écrire

$$T_1 = \beta_1 + i\partial\overline{\partial}\varphi_1,\ T_2 = \beta_2 + i\partial\overline{\partial}\varphi_2 \tag{7}$$

Définition 2.2. *On dira que T_1 est moins singulier que T_2 et on note $T_1 \preceq T_2$ s'il existe une constante réelle C telle que*

$$\varphi_1 \leq \varphi_2 + C$$

Notons que cette propriété est indépendante des choix de β_i, φ_i et que $\preceq$ définit donc une relation pré-ordre sur $\alpha[-\gamma]$.

Proposition 2.3. *(cf [2]) $(\alpha[-\gamma], \preceq$ admet un plus petit élément.*

Ce plus petit élément est appelé courant *à singularités minimales* (dans la classe $(\alpha[-\gamma])$. Il n'est bien entendu pas unique, cependant, deux courants à singularités minimales ont exactement même nombre de Lelong en chaque point.

Plus généralement, il résulte directement des définitions que si $T, T' \in (\alpha[-\gamma], \preceq)$ avec T à singularités minimales, on a pour tout $x \in M$

$$\nu(T,x) \leq \nu(T',x) \tag{8}$$

Par ailleurs, lorsque γ est nulle, on parlera de courant *positif à singularités minimales.*

Définition 2.4. *([2]) Soit α une classe pseudo-effective, on dira que α est* **nef en codimension 1** *ou* **nef modifiée** *si, pour une forme de Kähler fixée θ, il existe pour tout $\varepsilon > 0$, un courant $T_\varepsilon \in \alpha[-\varepsilon\theta]$ lisse en dehors d'un sous-ensemble analytique de codimension ≥ 2.*

Cette définition est évidemment indépendante de la métrique considérée.

Suivant ([2]), on notera $\mathcal{MN}$ le cône formé par les classes nefs modifiées.

Définition 2.5. *([2]) Soit $\mathcal{A}$ une famille finie de p diviseurs premiers distincts : $\mathcal{A} = \{D_1, ..., D_p\}$. On dira que cette famille est* **exceptionnelle** *si le cône convexe engendré par les $\{D_i\}$ n'intersecte le cône nef modifié $\mathcal{MN}$ qu'à l'origine.*

Théorème 2.6. *([2]) Soit α une classe pseudo-effective, il existe alors une unique décomposition de la forme*

$$\alpha = \{N(\alpha)\} + Z(\alpha) \tag{9}$$

où $Z(\alpha)$ est **nef en codimension 1** *et $N(\alpha)$ (***la partie négative***) est un $\mathbb{R}$ diviseur effectif dans $Div(M) \otimes \mathbb{R}$:*

$$N(\alpha) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i D_i \tag{10}$$

telle que la famille $\mathcal{A} = \{D_1, ..., D_p\}$ soit exceptionnelle.

Cette décomposition est par ailleurs unique et les coefficients λ_i sont déterminés suivant la formule :

$$\lambda_i = sup_{\varepsilon>0}\nu(T_{min,\varepsilon}, D_i) \tag{11}$$

où $T_{min,\varepsilon}$ désigne un courant à singularités minimales dans la classe $\alpha[-\varepsilon\theta]$.

Définition 2.7. *([2]) La* **dimension numérique** *$\nu(\alpha)$ de la classe pseudo-effective α est le plus petit entier $n \in \{0, ..., Dim\ M\}$ tel que $Z^{n+1}(\alpha) = 0$.*

Passons en revue quelques propriétés fondamentales de cette décomposition, appelée *décomposition divisorielle de Zariski*.

Proposition 2.8. *([2]) Soit α pseudo-effective et $N(\alpha) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i D_i$ sa partie négative ; alors*

i) La décomposition divisorielle $\alpha = \{N(\alpha)\} + Z(\alpha)$ coïncide avec la décomposition de Zariski classique lorsque M est une surface ; en particulier, elle est dans ce cas rationnelle (i.e $N(\alpha)$ est un $\mathbb{Q}$ diviseur effectif si α est une classe rationnelle).

ii) La famille $(\{D_1\}, ..., \{D_p\})$ est libre dans $H^{1,1}(M, \mathbb{R})$. En particulier, p est au plus égal au nombre de Picard $\rho(M)$ de la variété.

iii) Pour tout i, on a $\lambda_i \leq \nu(T, D_i)$ quel que soit le courant fermé positif tel que $\{T\} = \alpha$. En particulier, $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i[D_i]$ est le seul courant positif représentant $\{N(\alpha)\}$.

Remarque 2.9. *On peut avoir $\lambda_i < \nu(T, D_i)$ dans iii) même lorsque T est à singularités minimales (voir [2]). Nous verrons cependant que l'égalité est atteinte dans la situation qui est la nôtre.*

Reprenons nos hypothèses initiales : la variété ambiante est kählerienne compacte et muni d'un feuilletage holomorphe $\mathcal{F}$ dont le fibré conormal $N^*_{\mathcal{F}}$ est *pseudo-effectif.*

D'après les formules (4) et (5), nous disposons de deux courants positifs $\mathcal{F}$ invariants, à savoir T et η_T, le premier apparaissant comme la "forme de courbure"de la métrique transverse définie par le second (au sens de la relation (1)).

Puisque η_T est à coefficients localement bornés, la classe $\{\eta_T\}$ est *nef* et pour tout $(1,1)$ courant positif fermé Ξ, le produit extérieur

$$\Xi \wedge \eta_T$$

est bien défini en tant que $(2,2)$ courant positif par la formule usuelle (puisque ξ est d'ordre 0 et η_T à coefficients L^∞_{loc}) et coïncide avec $\frac{i}{\pi}\partial\overline{\partial}(\varphi\Xi)$, φ un potentiel local de η_T (en utilisant des noyaux régularisants et le fait que les potentiels locaux φ_η de η sont également L^∞_{loc}).Cette opération est par conséquent compatible avec le cup-produit en cohomologie :

$$\{\Xi \wedge \eta_T\} = \{\Xi\}\{\eta_T\} \tag{12}$$

Par ailleurs, on a

$$\Xi \wedge \eta_T = 0 \tag{13}$$

lorsque Ξ est de plus $\mathcal{F}$ invariant (par exemple, $\Xi = T$).

En particulier,

$$\{\eta_T\}^2 = 0 \tag{14}$$

Proposition 2.10. *Soit Ξ un $(1,1)$ courant positif $\mathcal{F}$ invariant (par exemple, $\Xi = T$). Considérons la décomposition de Zariski*

$$\alpha = \{N(\alpha)\} + Z(\alpha)$$

avec $\alpha = \{\Xi\}$ (par exemple, $\alpha = c_1(N^*_{\mathcal{F}}) = \{T\}$) ;

On a alors les propriétés suivantes.

i) Les composantes D_i de la partie négative $N(\alpha)$ sont des séparatrices du feuilletage ; en particulier, $Z(\alpha)$ peut être représenté par un courant positif Ξ_0 également $\mathcal{F}$ invariant.

ii) $Z(\alpha)$ est proportionnelle à $\{\eta_T\}$

iii) La classe $Z(\alpha)$ est nef et $Z(\alpha)^2 = 0$

iv) La décomposition est orthogonale : $\{N(\alpha)\}Z(\alpha) = 0$.

v) Dans $H^{1,1}(M,\mathbb{R})$, le $\mathbb{R}$ espace vectoriel engendré par les composantes $\{D_i\}$ de $\{N(\alpha)\}$ n'intersecte la droite vectorielle réelle engendré par η_T qu'à l'origine.

vi) La décomposition est rationnelle si M est projective et α est une classe rationnelle (par exemple, $\alpha = c_1(N^*_{\mathcal{F}})$).

vii)Tout $(1,1)$ courant positif fermé représentant α est nécessairement $\mathcal{F}$ invariant.

viii) Soit H une hypersurface invariante par le feuilletage et $H_1, ..., H_r$ ses composantes irréductibles ; la famille $\{H_1, ..., H_r\}$ est exceptionnnelle si et seulement si la matrice $(m_{ij}) = (\{H_i\}\{H_j\}\{\theta\}^{n-2})$ est définie négative, θ désignant une forme de Kähler fixée sur M.

Remarque 2.11. *La propriété $\nu(c_1(N^*_{\mathcal{F}})) \leq 1$ énoncée dans iii) n'est rien d'autre qu'une version numérique du théorème de Bogomolov-Castelnuovo-De Franchis :*

Théorème 2.12. *([16]) Soit M une variété projective et $\mathcal{F}$ un feuilletage de codimension 1 ; alors $\kappa(N^*_{\mathcal{F}}) \leq 1$ (κ désignant la dimension de Kodaira) et en cas d'égalité, $\mathcal{F}$ est une fibration au-dessus d'une courbe .*

Signalons qu'il existe des feuilletages à conormal pseudo-effectif tel que $\kappa(N^*_{\mathcal{F}}) = -\infty$ dont les prototypes sont les feuilletages minimaux (c'est-à-dire à feuilles denses) sur certaines surfaces de type général uniformisées par le bidisque (voir [3]).

De façon générale, on verra de plus (section 7) que le comportement dynamique du feuilletage est (du moins en dimension numérique 1) fidèlement reflété par les propriétés algébriques du conormal ; à savoir que $\mathcal{F}$ sera minimal (en un certain sens) si et seulement si $\kappa(N^*_{\mathcal{F}}) < 1$; *a contrario* le feuilletage sera une fibration si et seulement si le principe d'abondance est vérifié, ce qui n'est d'ailleurs qu'une reformulation du théorème précédent.

On peut démontrer la proposition 2.10 via le théorème de la signature de Hodge-Riemann dans un esprit similaire à ce qui est fait dans [9].

Considérons à cet effet la forme bilinéaire symétrique q définie sur $H^{1,1}(M,\mathbb{R})$ par

$$q(c, c') = -\int_M c \wedge c' \wedge \{\theta\}^{n-2},$$

θ étant une forme de Kähler fixée sur M.

Théorème 2.13. *(Hodge-Riemann)*

Notons $\mathcal{P}$ l'ensemble des classes primitives dans $H^{1,1}(M,\mathbb{R})$:

$$\mathcal{P} := \{c \in H^{1,1}(M,\mathbb{R}) | c \wedge \{\theta\}^{n-1} = 0\}.$$

Alors la forme q est définie positive sur l'hyperplan $\mathcal{P}$.

Afin de détailler la preuve de la proposition précédente, voici d'abord une remarque préliminaire :

.

Lemme 2.14. *Soit M Kähler compacte et $\beta \in H^{1,1}(M,\mathbb{R})$ une classe nef modifiée, alors $q(\beta,\beta) \leq 0$.*

Démonstration. Par définition, il existe pour $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit un $(1,1)$ courant positif fermé T_ε lisse en dehors d'un ensemble analytique de codimension 2 et tel que $\{T_\varepsilon\} \in \beta + \varepsilon\{\theta\}$. Suivant [8], il en résulte que $T_\varepsilon \wedge T_\varepsilon$ est bien défini en tant que $(2,2)$ courant *positif* fermé et que $\{T_\varepsilon\}^2 = \{T_\varepsilon \wedge T_\varepsilon\}$. Le lemme s'obtient alors par passage à la limite. □

Preuve de la proposition 2.10

i) : soit

$$\sum \nu(T,D)[D] + R$$

la décomposition de *Siu* du courant Ξ. Puisque Ξ est $\mathcal{F}$ invariant, on obtient que chaque diviseur premier D tel que $\nu(T,D) \neq 0$ est une séparatrice du feuilletage (de façon équivalente, le courant d'intégration $[D]$ est $\mathcal{F}$ invariant).

Soit

$$\alpha = \{N(\alpha)\} + Z(\alpha)$$

la décomposition divisorielle ; compte tenu de la propriété iii) de la proposition 2.8, chaque D_i est nécessairement $\mathcal{F}$ invariant. Par suite, le courant positif $\Xi - \sum \lambda_i[D_i]$ représentant $Z(\alpha)$ est également $\mathcal{F}$ invariant.

ii) : d'après i), le lemme 2.14 et les formules (12) et (13) ,la forme symétrique q est semi-négative en restriction au $\mathbb{R}$ espace vectoriel V engendré par $Z(\alpha)$ et $\{\eta_T\}$; suivant Hodge-Riemann, on a donc nécessairement $\dim V = 1$.

iii) : conséquence du point i), de (14) et le fait déjà observé que $\{\eta_T\}$ est *nef*.

iv) : conséquence de (12) et (13).

v) : soit W (resp. W^+) l'espace vectoriel (resp. le cône) engendré par les $\{D_i\}$. En exploitant le fait déjà établi que $\{\eta_T\}^2 = 0$, que $\{\eta_T\} \in W^\perp$ pour la forme bilinéaire q et la propriété *iv)* de la proposition 2.8, on obtient par le théorème de la signature que $q(\alpha_1,\alpha_1) > 0$ si $\alpha_1 \in W^+ \setminus \{0\}$. Par ailleurs, on a $q(\{D_i\},\{D_j\}) < 0$ si $i \neq j$, en conséquence de quoi on a $q(\alpha_2,\alpha_2) > 0$ si $\alpha_2 \in W \setminus \{0\}$. En particulier, α_2 n'est pas colinéaire à $\{\eta_T\}$.

On peut reformuler ce résultat en disant que la projection de W sur $\mathcal{P}$ parallèlement à la droite dirigée par $\{\eta_T\}$ n'est pas dégénérée, ce qui nous conduit au

Lemme 2.15. *La forme q est définie positive sur W. En particulier, α^2 n'est pas nulle (et plus précisément $q(\alpha,\alpha) > 0$) lorsque $N(\alpha)$ n'est pas triviale.*

vi) : Supposons maintenant que M est projective ; on peut choisir la forme de Kähler θ de telle sorte que la forme q soit rationelle, i.e : à valeurs rationnelles sur $E_{\mathbb{Q}} = NS(M)\otimes\mathbb{Q}$ où l'on note $NS(M)$ le groupe de Néron-Séveri de la variété. Soit $V_{\mathbb{Q}}$ l'espace vectoriel engendré par les $\{D_i\}$. Compte tenu des propriétés ii)...v) et du lemme précédent, $\{N(\alpha)\}$ doit coïncider avec la projection de α parallèllement à ${V_{\mathbb{Q}}}^{\perp}$, en particulier $\lambda_i \in \mathbb{Q}$ pour tout i.

vii) :résulte directement de (3) lorsque $\alpha = c_1({N_{\mathcal{F}}}^*)$.

Plus généralement, soit S un $(1,1)$ courant positif fermé tel que $\{S\} = \alpha$. D'après (11) et le point i) de la proposition, le courant $S_0 := S - N(\alpha)$ est positif et il suffit de montrer que S_0 est $\mathcal{F}$ invariant. Localement, on peut écrire

$$S_0 = \frac{i}{\pi}\partial\overline{\partial}\varphi$$

avec φ *psh.* Soit $N := N(c_1({N_{\mathcal{F}}}^*))$ et $Z := Z(c_1({N_{\mathcal{F}}}^*))$. Traitons d'abord le cas $Z = 0$; en utilisant (12) et (13), on constate que le $(2,2)$ courant positif fermé $\eta_T \wedge S_0$ est identiquement nul. Par ailleurs, on a localement, $\eta_T = i|f|^{\delta}\omega \wedge \overline{\omega}$ où f est une équation locale de l'hypersurface $H = |N|$, δ un réel positif et ω un générateur de ${N_{\mathcal{F}}}^*$. Ceci montre que S_0 est $\mathcal{F}$ invariant en dehors de H, donc sur M puisqu'on a vu que H est invariante par le feuilletage.

Supposons maintenant $Z \neq 0$; il suffit de montrer (i) prop 2.8) que le$(1,1)$ courant positif $S_0 - [N(\alpha)]$(qui représente donc $Z(\alpha)$) est invariant par le feuilletage et on peut donc supposer $Z(\alpha) \neq 0$. En utilisant le point ii) de la même proposition, il existe alors $\lambda > 0$ tel que $Z = \lambda Z(\alpha)$. Le courant $[N] + \lambda(S_0 - [N(\alpha)])$ représente donc $c_1({N_{\mathcal{F}}}^*)$, d'où l'invariance de S_0.

viii) : posons $\alpha = \sum_{i=1}^{r}\{H_i\}$ et supposons la famille exceptionnelle, ce qui revient à dire que $\alpha = \{N(\alpha)\}$. La négativité de (m_{ij}) résulte alors de (12), (13), (14) combinés avec le point v) de la proposition précédente et le théorème de Hodge-Riemann.

Réciproquement, supposons (m_{ij}) définie négative ; la partie positive de α est alors de la forme $Z(\alpha\} = \sum_{i=1}^{r}\mu_i\{H_i\}$ avec $0 \leq \mu_i \leq 1$. D'après iii) de la proposition 2.10 et compte tenu des hypothèses faites sur $(m_{ij}$ ceci n'est possible que si $\mu_i = 0$ pour tout i et implique bien que la famille est exceptionnelle. □

Remarque 2.16. *Nous pensons que la propriété iv) persiste sans hypothèses de projectivité mais nous ne connaissons pas de preuves.*

Notons qu'en dehors du contexte des feuilletages, la rationalité de la décomposition n'est pas toujours vraie ([7]).

Il est également naturel de conjecturer que le support de la partie négative $N(c_1({N_{\mathcal{F}}}^*)$ *est une hypersurface contractible.*

Proposition 2.17. *Soit* $\alpha = c_1({N_{\mathcal{F}}}^*)$*. Supposons que le feuilletage admette en tout point singulier un germe réduit d'intégrale première holomorphe ; alors* $N(\alpha)$ *est triviale.*

Démonstration. En effet, dans cette situation, les générateurs locaux du conormal peuvent être donnés par des formes holomorphes *fermées* qui se recollent donc suivant un cocycle multiplicatif $\{g_{UV}\}$ qui représente le fibré $N_{\mathcal{F}}$ et qui est *localement constant* sur les feuilles. D'un point de vue différentiable, la cohomologie de ce fibré est triviale à partir du rang 1 ; on peut donc trouver, pour tout couple d'ouverts (U,V) du recouvrement , $h_U \in \mathcal{C}^{\infty}(U), h_V \in \mathcal{C}^{\infty}(V)$ tel que sur $U \cap V$, on ait

$$\frac{dg_{UV}}{g_{UV}} = h_U\omega_U - h_V\omega_V$$

avec ω_U, ω_V des formes holomorphes *fermées* définissant le feuilletage sur les ouverts considérés ; sur chaque intersection, on a donc

$$dh_U \wedge \omega_U = dh_V \wedge \omega_V = \Omega.$$

La 2 forme différentielle Ω représente (au sens de de Rham et à un facteur près) la classe de Chern α. Par construction, $\Omega \wedge \Omega = 0$ et par suite $\alpha^2 = 0$, on conclut par le lemme 2.15.

□

3. Construction d'une métrique "canonique" sur l'espace des feuilles

Soit

$$\alpha = \{N\} + Z$$

($N = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i D_i = N(\alpha), Z = Z(\alpha)$) la décomposition de Zariski de la classe

$$\alpha = c_1(N_{\mathcal{F}}{}^*).$$

On a précédemment établi que

-Z est en fait *nef*,

-tout courant $(1,1)$ positif représentant N, Z ou α est $\mathcal{F}$ invariant,

-à tout $(1,1)$ courant positif T tel que $\{T\} = \alpha$ est canoniquement associée (modulo multiplication par un scalaire > 0) une $(1,1)$ forme positive fermée η_T (formule (2) et de plus, Z est proportionnelle à $\{\eta_T\}$. On adoptera donc par la suite la normalisation

$$\eta_T = Z$$

lorsque $Z \neq 0$.

Théorème 1. *Il existe un courant positif T de bidegré $(1,1)$ invariant par $\mathcal{F}$ tel que $\{T\} = \alpha$ et*

$$T = [N] + \varepsilon\eta_T \tag{15}$$

où $\varepsilon = 0$ si $Z = 0$ et $\varepsilon = 1$ sinon.

Ce courant T est par ailleurs unique.

Remarque 3.1. *En dehors de l'hypersurface $H = supp\ N$, l'égalité (15) indique, par des résultats classiques d'ellipticité, que T est lisse. Il est donc en particulier à singularités minimales.*

Par ailleurs, en un point régulier m du feuilletage appartenant à $M \setminus H$, les feuilles de $\mathcal{F}$ sont données par les niveaux d'une submersion z et il existe donc une fonction lisse sous-harmonique φ ne dépendant que de z telle qu'au voisinage de m,

$$T = \frac{i}{\pi}\partial\overline{\partial}\varphi \ et\ \frac{\partial^2\varphi}{\partial z\partial\overline{z}} = \varepsilon e^{2\varphi}$$

ce qui munit l'epace local des feuilles d'une métrique de courbure nulle ou -1 (modulo normalisation) suivant que $\varepsilon = 0$ ou 1.

Dans la terminologie des feuilletages, $\mathcal{F}$ est donc soit **transversalement euclidien**, *soit* **transversalement hyperbolique** *sur $M \setminus (H \cup Sing(\mathcal{F}))$ (cet aspect sera détaillé dans la section 6).*

Démonstration. Elle est immédiate si $Z(\alpha) = 0$; nous supposerons donc dorénavant cette classe *non triviale*.

Commençons par établir l'unicité. Soient

$$T_1 = \frac{i}{\pi}\partial\overline{\partial}\varphi_1 \textit{ et } T_2 = \frac{i}{\pi}\partial\overline{\partial}\varphi_2$$

deux courants satisfaisant aux conclusions du théorème 1. On peut choisir les potentiels locaux *psh* φ_i de telle sorte que

$$u = \varphi_2 - \varphi_1$$

soit une fonction bien définie sur la variété M et

$$\eta_{T_2} = \frac{i}{\pi}e^{2\varphi_2}\omega \wedge \overline{\omega} = e^{2u}\eta_{T_1}.$$

Plaçons nous *au voisinage* d'un point m de M.

Soient $\{f_1 = 0\}, ..., f_p = 0\}$ des équations réduites respectives de $D_1, ..., D_p$.

Les fonctions *psh* $\psi_k = \varphi_k - \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \log(|f_i|),\ k = 1, 2$ satisfont l'EDP

$$\partial\overline{\partial}\psi_k = \prod_{i=1}^{p} |f_i|^{2\lambda_i} e^{2\psi_k}\omega \wedge \overline{\omega}$$

et sont donc en particulier continues (en fait $\mathcal{C}^{2-\varepsilon}$). Par suite, $u = \psi_2 - \psi_1$ est continue.

Elle satisfait de plus

$$\partial\overline{\partial}u = (e^{2(\varphi_1+u)} - e^{2\varphi_1})\omega \wedge \overline{\omega}$$

En particulier, u est *psh* sur l'ouvert $\{u > 0\}$ qui est donc nécessairement vide par le principe du maximum. Comme $e^{\varphi_1}\omega \wedge \overline{\omega}$ et $e^{\varphi_2}\omega \wedge \overline{\omega}$ sont cohomologues, on en déduit que $u = 0$.

Reste à prouver l'existence ; à cet effet, introduisons l'ensemble $\mathcal{C}$ formé des $(1, 1)$ courants positifs fermés T tels que $\{T\} = Z(\alpha)$; c'est un sous-ensemble convexe et faiblement compact de l'espace des courants. Rappelons que ses éléments sont $\mathcal{F}$ invariants. Considérons également le courant représentant la partie négative N :

$$S = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i[D_i]$$

Suivant la formule (2)et d'après les résultats de la section 2, on hérite d'une application $\beta : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ définie comme suit :

pour tout $T \in \mathcal{C}$,

$$\beta(T) = \eta_{T+S},$$

ce qui a effectivement un sens après normalisation $\{\eta_{T+S}\} = Z(\alpha)$.

Le théoréme 1 et alors une simple conséquence du théorème du *point fixe de Tychonoff*, compte-tenu du

Lemme 3.2. *L'application β ci-dessus est continue (pour la topologie faible).*

Prouvons ce lemme. Soit $T \in \mathcal{C}$ et (T_n) une suite de courants de $\mathcal{C}$ convergeant faiblement vers T

Par compacité de $\mathcal{C}$, on peut supposer que la suite $(\beta(T_n))$ converge ; il s'agit alors de montrer que sa limite est *précisément* $\beta(T)$.

Considérons un recouvrement $(U_j)_{j\in J}$ de M par des ouverts de Stein contractiles U_j. Sur chaque U_j, tout courant fermé positif de bidegré $(1,1)$ admet donc un potentiel *psh*. Quitte à raffiner ce recouvrement, on peut exhiber sur chaque U_j une collection de fonctions $f_{j,i} \in \mathcal{O}(U_j)$ définissant localement $D_i, i = 1, ..., p$ par les équations (réduites) respectives $f_{j,i} = 0$ ainsi qu'une forme différentielle holomorphe ω_j (sans diviseur de zéros) définissant le feuilletage. Ces formes se recollent sur les intersections $U_j \cap U_k$ suivant le cocycle multiplicatif (g_{jk}) :

$$\omega_j = g_{jk}\omega_k$$

qui représente le fibré normal $N_{\mathcal{F}}$ du feuilletage.

Pour tout n, il existe sur chaque ouvert U_j une fonction psh $\varphi_{n,j}$ telle que

$$\frac{i}{\pi}\partial\overline{\partial}\varphi_{n,j} = T_n$$

dont l'unicité est assurée dès qu'on se prescrit les conditions suivantes :
pour tout n,

$$sup_j\ \varphi_{n,j} = 0\ ,\ \varphi_{n,j} - \varphi_{n,k} = -\log|g_{jk}| - \sum_i \lambda_i \log|f_{j,i}| + \sum_i \lambda_l \log|f_{k,i}|$$

Il existe par conséquent une suite de réels (c_n) telle que pour tout n, on ait en restriction à l'ouvert U_j :

$$\beta(T_n) = \eta_{T_n+S} = \frac{i}{\pi}e^{2\varphi_{n,j}+2\sum_i \lambda_i \log|f_{j,i}|+c_n}\omega_j \wedge \overline{\omega_j}$$

Quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer ([11]) que pour tout j, $(\varphi_{j,n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $L^1_{loc}(U_j)$ vers une fonction plurisousharmonique f_j telle que sur les intersections $U_j \cap U_k$, on ait :

$$f_j - f_k = -\log|g_{jk}| - \sum_i \lambda_i \log|f_{j,i}| + \sum_i \lambda_l \log|f_{k,i}|$$

Par construction, la collection des $\frac{i}{\pi}\partial\overline{\partial}f_i$ donnent lieu, par recollement, à un courant positif qui n'est rien d'autre que T.

Pour une constante réelle c *ad hoc*, on obtient donc qu'en restriction á une carte locale U_i,

$$\beta(T) = \frac{i}{\pi}e^{2f_j+2\sum_i \lambda_i \log|f_{j,i}|+c}\omega_j \wedge \overline{\omega_j}$$

Posons $u_n = e^{c-c_n}\eta_{T_n+S}$; sur U_j, on a

$$u_n - \beta(T) = \frac{i}{\pi}e^c \prod_i |f_{j,i}|^{2\lambda_i} e^{2(\varphi_{n,j}-f_j)}\omega_j \wedge \overline{\omega_j}$$

Fixons une forme test $\xi \in \Omega_c^{n-1,n-1}(U_j)$. Compte-tenu du fait que $\varphi_{n,j}$ et donc f_j ne prend pas de valeurs > 0,on déduit du théorème des accroissements finis qu'il existe une constante D_j telle que pour tout n, on ait

$$|\langle u_n - \beta(T), \xi\rangle| \leq D \int_K |\varphi_{n,j} - f_j| dm$$

où K désigne le support de ξ et m la mesure de lebesgue sur U_j. Au moyen d'une partition de l'unité, on en déduit que u_n converge vers $\beta(T)$ sur la variété M. Puisque $\beta(T_n)$ est par ailleurs convergente, la suite (c_n) admet une limite, nécessairement égale à c puisque $\{\beta(T)\} = \{\beta(T_n)\}$. On a donc bien que $\beta(T_n)$ converge vers $\beta(T)$

□

L'objet de la section qui suit est de décrire la nature des singularités pouvant apparaître dans la classe de feuilletages que nous étudions. Il sagit d'une étude purement locale qui peut éventuellement présenter un intérêt par elle-même.

4. Analyse locale des singularités

Les objets considérés ici seront de nature locale et il sera souvent commode d'adopter le langage des germes, sachant que , par abus de langage, la confusion sera souvent faite entre "germe" et "représentant d'un germe".

On se donne sur $(\mathbb{C}^n, 0)$, un germe de feuilletage défini par une forme holomorphe intégrable ω, ainsi qu'une fonction *psh* φ telle que

$$\eta = ie^{2\varphi}\omega \wedge \overline{\omega}$$

soit fermée (au sens des courants) et en particulier $\mathcal{F}$ invariante.

Théorème 2. *Soit $\mathcal{F}$ un germe de feuilletage holomorphe de codimension 1 vérifiant les hypothèses ci-dessus. Alors $\mathcal{F}$ admet une intégrale première* **élémentaire**, *c'est-à-dire du type $f = \prod_{i=1}^m f_i^{\gamma_i}$ où les γ_i sont des réels positifs et $f_i \in \mathcal{O}_n$.*

D'après [6], il suffit en fait d'établir ce résultat en restriction à un 2-plan générique ; on peut donc supposer que $n = 2$.

On constate par ailleurs que $\mathcal{F}$ ne peut être dicritique (sinon, cela créerait un phénomène de "concentration de masse" et forcerait le courant η à admettre un nombre de Lelong non nul à l'origine).

La preuve du théorème 2 s'articule alors comme suit Elle s'articule comme suit ; considérons le morphisme π de réduction des singularités de $\mathcal{F}$. On sait identifier les feuilletages à singularités réduites susceptibles d'admettre un courant invariant [4]. Dans le cas présent, oú le courant T a une forme trés particuliére, cette liste peut être affinée. En étudiant les germes de courants dépendant d'une variable complexe de la forme $ie^{2\varphi}dz \wedge d\overline{z}$ et invariants par un germe de Diff$(\mathbb{C}, 0)$, on peut par ailleurs analyser la structure des groupes d'holonomie projective. On recolle ensuite ces informations locales et semi-locales (dans l'esprit de ce qui est fait dans [15]).

Lemme 4.1. *Soit T un germe de courant dans $(\mathbb{C}, 0)$ de la forme*

$$T = ie^{2\varphi}dz \wedge d\overline{z}$$

où φ est psh; supposons que T soit invariant par l'action d'un sous groupe H finiment engendré de $Diff(\mathbb{C},0)$. Soit $h \in H$; pour tout voisinage V de 0, il existe un ouvert $U \subset V$ contenant 0 tel que $h(U) = U$.

Corollaire 4.2. *Sous les hypothèses du lemme 4.1, H est analytiquement conjugué à un sous-groupes du groupe des rotations*

$$R = \{z \to e^{2i\pi\lambda} z\}$$

i.e, il existe $\varphi \in Diff(\mathbb{C},0)$ tel que

$$\varphi^{-1} H \varphi \subset R$$

En effet, par le théorème du domaine invariant chaque élément h de H est analytiquement conjugué à une rotation. En particulier, H ne comporte pas de germe non trivial tangent à l'identité et est donc abélien. Il est alors bien connu (cf par exemple [12]) que tout sous-groupe abélien de type fini de $Diff(\mathbb{C},0)$ dont chaque élément est analytiquement linéarisable est lui-même analytiquement linéarisable.

Preuve du lemme 4.1

Soit $h \in H$ tel que $h^*T = T$. Supposons par l'absurde qu'il n'existe aucun ouvert $U \ni 0$ tel que $h(U) = U$.

Soit $\mathbb{D}_r \subset \mathbb{C}$ le disque ouvert $\{|z| < r\}$. Choisissons $0 < r_1 < r_2$ suffisamment petits de telle sorte que $T = ie^{2\varphi} dz \wedge d\overline{z}$ soit défini sur $\mathbb{D}_{r_2}$, que h soit univalent sur $\mathbb{D}_{r_1}$ et $h(\mathbb{D}_{r_1}) \subset \mathbb{D}_{r_2}$.

Soit $\gamma \subset \mathbb{D}_{r_1}$ une courbe rectifiable. Sa longueur, suivant la forme métrique $g = e^{\varphi}|dz|$ est donnée suivant la formule

$$l_g(\gamma) = \int_\gamma e^{\varphi(z)} d\mathcal{H}$$

où $\mathcal{H}$ désigne la mesure de Haussdorff de dimension 1 ; pour $a \in \mathbb{C}$, notons γ_a le segment $[0,a]$. La non-existence de domaine invariant par h implique qu'il existe une suite (a_n) de points de $\mathcal{D}_{r_1} \setminus K_{r_1}$ convergeant vers l'origine ainsi qu'une suite d'entiers relatifs k_n telle que

$$h^{k_n}(\gamma_{a_n}) \in \mathbb{D}_{r_2} \ , h^{k_n}(\gamma_{a_n}) \cap (\mathbb{D}_{r_2} \setminus \mathbb{D}_{r_1}) \neq \emptyset$$

Compte tenu des propriété d'invariance de T', on a par ailleurs

$$l_g(h^{k_n}(\gamma_{a_n})) = l_g(\gamma_{a_n}).$$

Si l'on reprend le raisonnement mené dans [3], on constate que qu'il existe un réel strictement positif M tel que pour tout n, on ait

$$l_g(h^{k_n}(\gamma_{a_n})) > M$$

alors que $l_g(\gamma_{a_n})$ converge vers 0, ce qui mène évidemment à une contradiction. $\square$

Preuve du théorème 2

Considérons l'arbre de réduction $\mathcal{A}$ du feuilletage $\mathcal{F}_\omega$ donné sur un voisinage V de l'origine dans $\mathbb{C}^2$ par $\omega = 0$.

On notera

$$\rho : U \to V$$

le morphisme de réduction, défini sur un voisinage U de $\mathcal{A}$ et composé d'une succession d'éclatements ponctuels.

Par hypothèse, le feuilletage réduit $\tilde{\mathcal{F}} = \rho^*\mathcal{F}$ admet un $(1,1)$ courant positif fermé invariant par holonomie

$$\tilde{T} = \pi^* T := ie^{2\phi\circ\rho}\rho^*\omega \wedge \rho^*\overline{\omega}$$

Par construction, $\tilde{T}$ est localement de la forme $ie^{2\tilde{\varphi}}\tilde{\omega} \wedge \overline{\tilde{\omega}}$ où $\tilde{\varphi}$ est *psh* et $\tilde{\omega}$ un générateur du feuilletage saturé $\tilde{\mathcal{F}}$.

Soit S l'ensemble des séparatices de $\mathcal{F}_\omega$. Puisqu'on est dans une situation *non dicritique*, S est constituée d'une union finie de p courbes irréductibles.

Désignons par $\tilde{S}$ la transformée sricte de S par π. D'après l'analyse précédente, les singularités qui apparaissent après réduction sont du type Siegel linéarisable, c'est à dire sont donnés par des formes différentielles qui s'écrivent à conjugaison *analytique* près

$$zdw + \lambda wdz,\ \ \lambda > 0$$

et qui admettent par conséquent des intégrales premières du type zw^λ.

L'ensemble des singularités Sing $\tilde{\mathcal{F}}$ du feuilletage réduit $\tilde{\mathcal{F}}$ est alors exactement localisé aux intersections des composantes irréductibles de $\pi^{-1}(S)$.

Nous reprenons pour ce qui suit la terminologie et les notations adoptées dans [15]. Soit $Z \subset \tilde{S}$ une zone holomorphe maximale et f_Z une transversale *holomorphe* définie sur un voisinage U_Z de Z.

Supposons $Z \neq \tilde{S}$ et considérons une composante adjacente $C \subset \mathcal{A}$. Soit $C^* = C \setminus Sing\ \tilde{\mathcal{F}}$.

Choisissons un point $m \in C^*$ ainsi qu'une transversale locale f_m en m au feuilletage $\tilde{\mathcal{F}}$. Soit $T_m = (\mathbb{C}, 0)$ l'image de cette transversale locale. Au voisinage de m, on a $f_Z = l(f_m)$ où $l \in \mathcal{O}_1$. Suivant [15], on introduit le *groupe d'invariance de f_Z par rapport à f_m* :

$$Inv(f_Z, f_m) = \{g \in Diff(T_m) | l \circ g = l\}$$

qu'on enrichit par le groupe $G_m \in Diff(T_m)$ d'holonomie projective de C^* afin d'obtenir le groupe $\overline{G_m}$ engendré par $Inv(f_Z, f_m) \cup G_m$.

D'après ce qui précède, G est analytiquement conjugué à un sous-groupe dense du groupe des rotations et ceci entraîne, d'après [15] que $\tilde{\mathcal{F}}$ admet au voisinage de $Z \cup C$ une intégrale première (une transversale dans le langage de [15]) logarithmique ; c'est-à-dire une intégrale première multiforme f telle que df/f soit une forme fermée à pôles simples définissant le feuilletage sur la zone considérée (et bien définie modulo multilication par une constante).

Après normalisation et compte-tenu de la description des singularités locales, on peut de plus affirmer que les résidus de cette forme fermée sont des réels positifs.

Supposons maintenant qu'il existe une zone logarithmique non holomorphe ; des raisonnements similaires (voir [15]) pour les détails) montrent qu'elle s'étend en une zone logarithmique sur les composantes exceptionnelles adjacentes. Ceci achève la preuve du théorème 2. Nous revenons maintenant au cadre global étudié dans les trois premières sections. □

5. Structure du feuilletage au voisinage d'une hypersurface invariante

Nous réadoptons les notations de la section 3 : $\alpha := c_1(N_{\mathcal{F}}{}^*)$ est supposée pseudo-effective et admet $\alpha = \{N\} + Z$ comme décomposition de Zariski.

Il pourra être utile d'utiliser la caractérisation des singularités locales pour donner une "description" du feuilletage $\mathcal{F}$ près d'une hypersurface invariante et plus particulièrement au voisinage de $H = |N|$.

Soit p un point de M tel que $p \notin H$. Quand p est de plus un point régulier du feuilletage, le conormal est engendré par dz dans une coordonnée z adéquate.

La forme positive η_T mentionnée dans le théorème 1 s'explicite alors comme suit :

$$\eta_T = \frac{i}{\pi} e^{2\varphi(z)} dz \wedge d\overline{z}$$

avec $\Delta\varphi := \frac{\partial^2\varphi}{\partial z \partial \overline{z}} = \varepsilon e^{2\varphi}$, avec $\varepsilon = 0$ (cas *transversalement euclidien*) ou $\varepsilon = 1$ (*cas transversalement hyperbolique*).

Rappelons comment sont construites ces structures transverses.

Soit d^0 la métrique euclidienne standard $idu \wedge d\overline{u}$ sur la droite complexe $U^0 = \mathbb{C}$ et $d^1 = \frac{i}{\pi} \frac{du \wedge d\overline{u}}{(1-|u|^2)^2}$ la métrique de Poincaré (convenablement normalisée) sur le disque $U^1 = \mathbb{D} = \{|u| < 1\}$ (plus exactement leurs formes d'aire respectives).

Soit I^ε le groupe des isométries conformes de $U^\varepsilon, \varepsilon = 0, 1$. Il existe alors au voisinage de chaque point $p \notin H$ un germe d'intégrale première f à valeur dans U^ε telle que $\eta_T = f^* d^\varepsilon$ et f est uniquement définie modulo l'action à gauche de I^ε. C'est un fait classique lorsque p est régulier (auquel cas f est une submersion) qui s'étend sans difficultés à $p \in Sing\ \mathcal{F} \setminus H$ en utilisant que $V \setminus Sing\ \mathcal{F}$ est simplement connexe pour un voisinage ouvert V convenablement choisi et arbirairement petit de p ainsi que le théorème de prolongement d'Hartogs. Notons que le lieu critique de f coïncide localement avec $Sing\ \mathcal{F}$ et qu'il ne s'agit donc plus nécessairement d'une submersion.

Définition 5.1. *Le faisceau défini sur $M \setminus H$ et déterminé par la collection de ces germes f (lorsque p varie) est appelé* **faisceau des intégrales premières admissibles** *et sera noté $\mathcal{I}^\varepsilon$.*

Il sera également commode d'y adjoindre le faisceau suivant.

Définition 5.2. *Le faisceau défini sur $M \setminus H$ et déterminé par la collection des dérivées logarithmiques $\frac{df}{f}, f \in \mathcal{I}^\varepsilon$ est appelé* **faisceau des dérivées logarithmiques admissibles** *et sera noté $\mathcal{I}^\varepsilon_{d\log}$*

Rappelons (théorème 2) que le feuilletage possède au voisinage de tout point p de M une intégrale première "élémentaire" du type

$$F = \prod_{i=1}^{m} f_i^{\gamma_i}$$

et admet par conséquent comme seule séparatrice locale le germe d'hypersurface $X_p = \{\prod_{i=1}^m f_i = 0\}$. Cette situation inclut évidemment le cas où $\mathcal{F}$ est régulier en p !

Lemme 5.3. *Sur un voisinage suffisamment petit V_p de p,le feuilletage $\mathcal{F}_{V_p \setminus X}$ est définie par une section de $\mathcal{I}^{\varepsilon}_{d\log}$ qui s'étend en une forme logarithmique η_p sur V_p à pôles exactement dans sur X. Cette forme η_p est par ailleurs unique.*

Démonstration. Traitons en premier lieu le cas où $\mathcal{F}$ est **régulier** en p. Si p appartienne à une composante H_{i_0} de H, on convient de poser $\lambda = sup_{\varepsilon>0}\nu(T_{min,\varepsilon}, H_{i_0})$ (on réadopte ici les notations du théorème 2.6) et $\lambda = 0$ sinon. Soit $(T_p, p) \simeq (\mathbb{D}, 0)$ un germe de transversale à $\mathcal{F}$ en p.

La restriction de η_T à T_p est alors de la forme $\tilde{\eta_T} = \frac{i}{\pi}e^{2\varphi(z)}dz \wedge d\overline{z}$ où φ est une fonction sous harmonique sur T_p, lisse en dehors de p et vérifiant l'EDP

$$\Delta\varphi := \frac{\partial^2\varphi}{\partial z\partial\overline{z}} = \varepsilon e^{2\varphi} + \lambda\delta_p \tag{16}$$

où δ_p est la masse de Dirac en p.

Sur tout ouvert sectoriel de T_p de la forme $S = \{z \neq 0; \alpha < \arg z < \alpha + 2\pi\}$, il existe par simple connexité une section f de $\mathcal{I}^{\varepsilon}$.

Soit $\gamma : [0,1] \to T_p$ une courbe rectifiable telle que $\gamma(1) = p$ et $\gamma(t) \in S, t \neq 1$. Puisque $\tilde{\eta_T}(= f^*d^{\varepsilon}$ sur $S)$ est à coefficients bornés sur T_p, on obtient que $f \circ \gamma(t)$ admet une limite l dans U^{ε} quand $t \to 1$, laquelle est indépendante du chemin γ considéré.

Soit $\tau_c(f), \tau_c \in I^{\varepsilon}$ la section de $\mathcal{I}^{\varepsilon}$ définie sur S et obtenue par prolongement de f le long d'un lacet $c : [0,1] \to T_p \setminus \{p\}$. On a visiblement $\tau_c(l) = l$, de sorte qu'on peut se ramener au cas ou $l = 0$ et τ_c est donc une rotation fixant 0. On obtient alors facilement que $f(z) = z^{\mu}h(z)$ où μ est un certain réel positif tel que $e^{2i\pi\mu}$ soit l'angle de la rotation et $h \in \mathcal{O}^*$. Quitte à se placer dans une coordonnée holomorphe appropriée, on peut donc supposer que $f(z) = z^{\mu}$; on conclut finalement que $\tilde{\eta_T} = f^*d^{\varepsilon} = \mu^2\frac{i}{\pi}|z|^{2\mu-2}dz \wedge d\overline{z}$ si $\varepsilon = 0$
$= \mu^2\frac{i}{\pi}|z|^{2\mu-2}\frac{dz\wedge d\overline{z}}{(1-|z|^{2\mu})^2}$ si $\varepsilon = 1$.

(ces égalité, vraies sur $T_p\setminus\{p\}$ s'étendent en fait sur T_p car les mesures impliquées dans les membres de gauche et droite n'affectent pas de masse au point p).

En particulier, on a $\mu > 1$ et $\varphi(z) = (\mu - 1)\log|z| + O(1)$ ce qui entraîne finalement d'après (16) que $\mu = \lambda+1$. . La forme η_p est alors l'extension méromorphe de $\frac{df}{f}$ sur T_p (et donc sur un voisinage de p par flow-box).

Il reste à considérer le cas où $p \in H$ est également une singularité du feuilletage. On se ramène à la situation précédente ; pour ce faire, choisissons p' régulier, $p' \in X_p$, ainsi qu'une transversale $T_{p'}$, un secteur $S' \in T_{p'}$, une section $f \in \mathcal{I}^{\varepsilon}(S')$ et une forme $\eta_{p'}$ définies comme ci-dessus. Pour S' convenablement choisi, la section locale f se factorise à travers une détermination $\overline{F}$ de l'intégrale première élémentaire F suivant

$$f(z) = (\psi(\overline{F}^{\alpha}(z))^{\beta}$$

avec $\alpha, \beta > 0$ et ψ un difféomorphisme local de $(\mathbb{C}, 0)$. Soit $\delta > 0$ suffisamment petit et $V_{\delta} \subset V_p$ la composante connexe de $|F| < \delta$ contenant p (et donc p'). En exploitant maintenant à nouveau que $Sing\mathcal{F}$ est de codimension 2 et ce qui précède, on observe que le prolongement analytique de $\eta_{p'}$ dans V_δ induit la forme η_p requise au voisinage de p. $\square$

Soit K une hypersurface invariante par le feuilletage et $K_1, ..., K_r$ ses composantes irréductibles.

Posons $\nu_i = sup_{\varepsilon>0}\nu(T_{min,\varepsilon}, K_i)$. On rappelle que notamment que $\nu_i = 0$ si et seulement si $K_i \nsubseteq H$. L'unicité de la forme logarithmique construite dans la démonstration précédente fournit immédiatement une version (semi) globale du lemme 5.3.

Proposition 5.1. *Sur un voisinage suffisamment petit V de K, le feuilletage $\mathcal{F}_{V\setminus K}$ est définie par une section de $\mathcal{I}^{\varepsilon}_{d\log}$ qui s'étend en une forme logarithmique η_K sur V dont le résidu le long de K_i est égal à $\nu_i + 1$, $i = 1, ..., r$. Cette forme η_K est par ailleurs unique.*

Remarquons que le support $|(\eta_K)_\infty|$ du diviseur des pôles $(\eta_K)_\infty$ de η_K peut être *a priori* plus gros que K (par construction, les pôles de η_K sont exactement localisés sur les séparatrices locales le long de K). En termes d'intersection, ceci se reflète facilement de la façon suivante :

Lemme 5.4. *Soit θ une forme de Kähler sur M ; pour tout $1 \leq i \leq r$, posons*

$$a_i = \{K_i\} \sum_j (\mu_j + 1)\{K_j\}\{\theta\}^{n-2}.$$

Alors, pour tout i, $a_i \leq 0$.

De plus, $a_i = 0$, $i = 1, ..., r$ si et seulement si $|(\eta_K)_\infty| = K$.

Nous supposons par la suite que K est de plus *connexe*.

Proposition 5.2. *La famille $\{K_1, ..., K_r\}$ est exceptionnelle si et seulement si $|(\eta_K)_\infty| \supsetneq K$.*

Démonstration. Soit $(M, \{\theta\})$ une polarisation de M fournie par une forme de Kähler θ. On peut d'abord rappeler (viii) proposition 2.10) que la famille $\{K_1, ..., K_r\}$ est exceptionnelle si et seulement si la matrice $(m_{ij} = K_i K_j \omega^{n-2})$ est définie négative.

Supposons que $|(\eta_K)_\infty| = K$; on déduit alors du lemme que précédent que $\{D\}^2\{\omega\}^{n-2} = 0$, en posant $D = \sum_i (\mu_i + 1) D_i$; la famille n'est donc pas exceptionnelle.

Supposons inversement que $\{D_1, ..., D_r\}$ n'est pas exceptionnelle ; quitte à réordonner les indices, il existe $1 \leq p \leq r$, $\mu_1, \mu_2, ..., \mu_p > 0$ tels que

$$\left(\sum_{i=1}^{p} \mu_i \{D_i\}\right)^2 = 0$$

(conséquence de iii) proposition 2.10).

En appliquant à nouveau le lemme 5.4, un simple calcul nous montre que tous les pôles de η restreinte à un petit voisinage de $\tilde{K} := K_1 \cup K_2 \cup ... \cup K_p$ sont localisés sur $\tilde{K}$. Par hypothèse de connexité, on a en fait $\tilde{K} = K$ et donc bien $|(\eta_K)_\infty| = K$. $\square$

6. Propriétés de l'application développante

Les feuilletages étudiés sont transversalement hyperboliques ou euclidiens en dehors du support H de la partie négative (en un sens large car les intégrales premières locales qui définissent la structure métrique transverse peuvent avoir un lieu critique non vide, i.e : $\mathcal{F}$ peut présenter des singularités en dehors de H). Suivant la théorie générale des feuilletages transversalement homogènes, on peut donc considérer l'application développante ρ de $\mathcal{F}$, définie sur le revêtement universel N de $M \setminus H$. Cette application est en fait induite par le prolongement analytique d'une intégrale première admissible locale (bien défini sur N) et est unique modulo l'action de I^ε. Rappelons en quelques propriétés (cf.[10]) :

ρ est holomorphe sur N, à valeur dans U^ε et submersive en dehors de $S = \pi^{-1}(Sing\ \mathcal{F})$ où π désigne le morphisme de revêtement.

Les feuilles du feuilletage relevé $\tilde{\mathcal{F}} = \pi^*\mathcal{F}$ sont données par les composantes connexes des niveaux de $\rho_{|N\setminus S}$.

Il existe une représentation r de $\pi_1(M \setminus H)$ dans I^ε telle que pour tout $(\gamma, x) \in \pi_1(M \setminus H) \times N$, on ait

$$\rho(\gamma.x) = r(\gamma)\rho(x).$$

Rappelons enfin que la développante est *complète* si l'image de $\rho(N)$ est U^ε.

Théorème 3. *L'application développante ρ associée aux feuilletage $\mathcal{F}$ est* **complète***. De plus, pour tout $c \in U^\varepsilon$, la fibre $\rho^{-1}(c)$ est connexe.*

Nous aurons besoin des deux résultats suivants.

Lemme 6.1. *Soit $\mathcal{F}$ un feuilletage holomorphe défini au voisinage de $0 \in \mathbb{C}^n$ amettant une intégrale première élémentaire*

$$F = \prod_{i=1}^{m} f_i^{\gamma_i}.$$

Soit $X_1 = \{f_1 = 0\}$, $p \in X_1$ régulier et T_p une petite tranversale au feuilletage en p ; alors le saturé de T_p par $\mathcal{F}$ contient un ouvert de la forme $W \setminus \{\prod_{i=1}^m = 0\}$ où W est un voisinage de l'origine.

Ce lemme admet, via un simple argument de flow-box la version semi-globale suivante :

Corollaire 6.2. *Soit $\mathcal{F}$ un feuilletage holomorphe défini au voisinage d'une hypersurface invariante connexe K. On suppose $\mathcal{F}$ à singularités élémentaires sur K. .Soit $p \in K$ un point régulier et T_p une petite tranversale au feuilletage en p ; alors le saturé de T_p par $\mathcal{F}$ contient un ouvert de la forme $W \setminus K$ où W est un voisinage de K.*

Démonstration du théorème 3. Soit g une métrique hermitienne sur M et V l'ouvert de $M \setminus H$ où $\mathcal{F}$ est régulier et où son fibré tangent $T\mathcal{F}$ est donc bien défini. Munissons $T\mathcal{F}^\perp$ de la métrique induite par celle qu'on a implanté sur $N_{\mathcal{F}}$ (i.e associée à la métrique euclidienne ou hyperbolique transverse). On récupère ainsi sur V une métrique hermitienne qui préserve cette décomposition orthogonale (en général non holomorphe).

Il existe par conséquent une suite strictement croissante de réels (a_i), $a_0 = 0$, $lim_{i \to +\infty} = a$ associée à des segments géodésiques (pour la métrique g) $\alpha_i : [a_i, a_{i+1}[\to V$ tel que pour chaque indice i et tout $t \in [a_i, a_{i+1}[$, on ait

$$\rho\big(\pi^{-1}\alpha_i(t)\big) = \gamma(t).$$

Quitte à considérer une sous-suite si nécessaire, on peut de plus supposer que $p_i := \alpha_i(a_i)$ converge vers $p \in H \cup Sing\mathcal{F}$. Notons $\mathcal{L}_i$ la feuille de $\mathcal{F}$ passant par p_i. On peut maintenant invoquer le lemme et corollaire précédents ainsi que la proposition 5.2 pour conclure qu'il existe $q \in V$ tel que pour tout voisinage V_q de q, on ait $\mathcal{L}_i \cap V_q \neq \emptyset$ pour i assez grand. Fixons V_q et i comme ci-dessus ; soient $q_i \in V_q \cap \mathcal{L}_i$ et $\beta : [0,1] \to \mathcal{L}_i$ un chemin joignant p_i à q_i et h_β l'application d'holonomie correspondante, dont la différentielle induit donc une isométrie entre $T_{p_i}\mathcal{F}^\perp$ et $T_{q_i}\mathcal{F}^\perp$.

Soit $v_i = dh_\beta({\alpha_i}'(t_i))$; quitte à prendre i suffisamment grand, on peut choisir q_i de telle sorte que le segment géodésique $\alpha : [0, a_i] \to V_q, \alpha'(0) = v_i$ soit bien défini ; ceci contredit visiblement le fait que $a_i \notin \rho(N)$.

Remarque 6.3. *On vient en fait d'établir la propriété suivante :*
il existe $r > 0$ tel que sur toute feuille $\mathcal{L}$ de $\mathcal{F}$ en restriction à $M \setminus H$, il existe $q \in \mathcal{L}$ tel que la boule géodésique $B(q, r)$ (pour la métrique g) soit bien définie et tel que $\mathcal{F}$ admette une intégrale première admissible sur $B(q, r)$.

En ce qui concerne la connexité, l'argument est assez similaire. Notons $\mathcal{R}$ la relation d'appartenance à la même composante connexe des fibres de l'application développante ρ. Cette dernière induit sur $N/\mathcal{R}$ (muni de la topologie quotient) une application continue $\rho_\mathcal{R}$ surjective à valeur dans U^ε qui est de plus un *homéomorphisme local*.

Plus précisément, soit T une transversale à $\pi^*\mathcal{F}$ sur laquelle la développante ρ est injective ; soit U_T l'ouvert de N obtenu en saturant T par $\mathcal{R}$. Il est alors clair que $\rho_\mathcal{R}$ définit un homéomorphisme entre les ouverts $U_T/\mathcal{R}$ et $\rho(T)$. cet homéomorphisme local est en fait un revêtement par la remarque ci-dessus ; les fibres de ρ sont donc connexes par simple connexité de U^ε.

□

7. Uniformisation et dynamique

La structure riemanienne transverse de nos feuilletages, telle qu'elle est précisée dans la section 6, peut éventuellement ne plus être définie sur un sous ensemble analytique qui contient le support H de la partie négative de ${N_\mathcal{F}}^*$. Le fait que l'on ait un contrôle explicite de ce type de dégénerescence n'affecte pas profondément leur dynamique en comparaison du cas classique, i.e les feuilletages transversalement riemanniens sur une variété (réelle) compacte. Rappelons à cet effet quelques propriétés de ces derniers (cf [14]).

-La variété est union disjointe des minimaux du feuilletage.

-Lorsque le feuilletage est de codimension 2 réelle, un minimal est de l'un des trois types suivants :soit une feuille compacte, soit la variété elle-même, soit une hypersurface réelle.

Nous réadoptons les notations de la section 6.

Soit G l'image de la représentation r et G_0 la composante neutre de son adhérence $\overline{G}$ dans le groupe I^ε.

Dans la mesure où nous manipulons des feuilletages à priori singulier (en particulier si $H \neq \emptyset$), il sera approprié de modifier légèrement la définition de feuille pour se ramener en quelque sorte au cas régulier.

A cet effet, soit $c \in U^\varepsilon$ et F_c la fibre $p^{-1}(c)$. Posons $G_c = \pi(F_c)$; par construction $G_c = G_{c'}$ si et seulement si il existe $g \in G$ tel que $c' = g(c)$ et $G_c \cap G_{c'} = \emptyset$ sinon.

Il y a deux configurations possibles :

-ou bien il existe $p \in Sing\ \mathcal{F} \cup H$ et une séparatrice locale X_p de $\mathcal{F}$ en p telle que $X_p \setminus H \subset G_c$, auquel cas on pose $\mathcal{L}_c = G_c \cup \mathcal{C}$, où $\mathcal{C}$ est la composante connexe de H contenant p ;

-ou bien il n'existe pas de tel p, auquel cas on pose $\mathcal{L}_c = G_c$.

Définition 7.1. *Un sous ensemble de M de la forme $\mathcal{L}_c$ est appelée* **feuille adaptée** *du feuilletage $\mathcal{F}$.*

Définition 7.2. *Un sous-ensemble $\mathcal{M}$ de M est appelé* **minimal adapté** *du feuilletage si $\mathcal{M}$ est l'adhérence dans M d'une feuille adaptée et est minimal pour l'inclusion*

Remarquons d'abord que la collection $\{\mathcal{L}_c\}_{c \in U^\varepsilon}$ définit une partition de M ; en effet, soit X_p, $X_{p'}$ deux germes de séparatrices de $\mathcal{F}$ localisées en deux point p, p' d'une même composante connexe $\mathcal{C}$ de H et telles que $X_p, X_{p'}$ ne coïncident pas avec une branche locale de $\mathcal{C}$. Au voisinage de $\mathcal{C}$; soit $\eta_{\mathcal{C}}$ la forme logarithmique produite par le théorème 5.1 sur un voisinage de $\mathcal{C}$. Sur V, on peut choisir $m \in X_p \backslash \mathcal{C}$, $m' \in X_{p'}$ ainsi qu'un lacet $\gamma \in V \backslash \mathcal{C}$ joignant m à m'. Puisque les résidus de η le long de ces deux séparatrices locales valent 1, on obtient au voisinage de m et m deux sections $F_m, F_{m'}$ de $\mathcal{I}^\varepsilon$ de la forme $e^{\int \eta}$ de telle sorte que $F_{m'}$ soit obtenu comme prolongement analytique de F_m le long de γ. Puisque $F_m(m) = F_{m'}(m') = 0$, on conclut que X_p et $X_{p'}$ appartiennent à une même feuille adaptée.

On notera $M/\mathcal{F}$ l'espace quotient associé à cette partition. On obtient alors une bijection canonique $\Psi : M/\mathcal{F} \to U^\varepsilon/G$ induite par la correspondance $\mathcal{L}_c \to c$.

En combinant ce qui vient d'être dit avec le corollaire 6.2 on obtient l'énoncé suivant, qu'on peut interpréter comme une sorte d'uniformisation de l'espace des feuilles.

Théorème 4. *L'application Ψ ci-dessus est un homéomorphisme (pour la topologie quotient à la source et au but).*

Par compacité de M, on a en particulier le

Corollaire 7.3. *Le groupe G est co-compact, i.e : U^ε/G est compact (non nécessairement séparé) pour la topologie quotient*

Remarque 7.4. *Puisque toute les singularités du feuilletage sont de nature élémentaire, on pourra également noter que les feuilles adaptées qui ne sont pas feuille au sens ordinaire sont en nombre fini*

Au vu de ce qui précède, on peut observer que les propriétés dynamique du feuilletage sont fidèlement reflétés par celle de du groupe G. Il s'agit de décrire les diverses formes que peut présenter celui-ci (ou plus exactement son adhérence $\overline{G}$).

On procède d'abord par élimination en supposant que $U^\varepsilon = \mathbb{D}$ et G affine (c'est-à-dire fixe un point sur le bord du disque). En particulier, G ne contient pas de transformation elliptique non triviale. Il n'y a donc pas d'obstruction à ce que $F = e^{\int \eta_H}$ soit une intégrale première *holomorphe* du feuilletage sur un voisinage V de

H. Par construction, $F_{|V \setminus H} \in \mathcal{I}^1(V \setminus H)$ et le diviseur des zéros de dF coïncide avec la partie négative N. En utilisant maintenant que G est affine, on obtient finalement que $\mathcal{F}$ est défini par une section sans diviseur de zéro de $N_{\mathcal{F}}{}^* \otimes \mathcal{O}(-N) \otimes E$ où E est un fibré en droite holomorphe *plat* (c'est peut-être plus évident à voir si l'on se place sur le modèle du demi-plan) ; ceci est incompatible avec le fait que la partie positive Z est non triviale.

En expoitant par ailleurs la co-compacité de G (et donc de $\overline{G}$), on aboutit facilement au descriptif complet qui suit.

Proposition 7.5. *Le groupe $\overline{G}$ se présente sous l'une des formes exclusives suivantes (à conjugaison près dans $\mathcal{I}^\varepsilon$).*

a) $G = \overline{G}$ et est donc un réseau co-compact.

b) L'action de G est minimale et dans ce cas
$\varepsilon = 0$ et $\overline{G}$ contient le sous groupe des translations de $\mathcal{I}^0$
ou
$\varepsilon = 1$ et $\overline{G} = \mathcal{I}^1$.

c) $\varepsilon = 0$ et $\overline{G}$ contient le groupe des translations réelles $T = \{t_\alpha,\ \alpha \in \mathbb{R}\}$ ($t_\alpha(z) = z + \alpha$) et plus précisément
$\overline{G} = \langle T, t\rangle$ $(*)$
ou
$\overline{G} = \langle T, t, s\rangle$ $(**)$
avec $t(z) = z + ai$ où a est un réel fixé non nul et $s(z) = -z$.

En synthétisant ce qui a été observé depuis la section 6, on aboutit à la description de la dynamique du feuilletage, laquelle se décline suivant les différents cas identifiés dans la proposition précédente.

Théorème 5. *L'adhérence de toute feuille adaptée est un minimal adapté ; de plus dans le cas a), $\mathcal{F}$ est une fibration holomorphe à fibres connexes au dessus de la surface de Riemann compacte (orbifold) U^ε/G ;*
dans le cas b), M est l'unique minimal adapté ;
dans le cas c), chaque minimal adapté est une hypersurface analytique réelle. [1]

Corollaire 7.6. *Supposons que $\mathcal{F}$ n'est pas une fibration ; alors l'ensemble des hypersurfaces irréductibles invariantes par le feuilletage forme une famille exceptionnelle En particulier, son cardinal ne peut excéder $\rho(M)$.*

Démonstration. Raisonnons par l'absurde ; il existe alors une hypersurface connexe $K = K_1 \cup K_2 ... \cup Kr$ invariante par $\mathcal{F}$ et telle que la famille $\{K_1, .., K_r\}$ ne soit pas exceptionnelle. En vertu de la proposition 5.2, K est nécessairement une feuille adaptée, ce qui contredit le théorème précédent. □

---

1. Cet énoncé n'est pas tout à fait exact dans le cas (**) où l'on pourrait avoir quelques minimaux adaptés semi-analytiques, phénomène qu'on peut attribuer à l'existence *a priori* de composantes de H dont le coefficient correspondant dans la décomposition Zariski est un demi entier (ces composantes apparaissant alors comme le bord des minimaux en question). On peut toutefois se ramener au cas (*) au moyen d'un revêtement double (ramifié) associé à une section de $(N_{\mathcal{F}}{}^*)^{\otimes 2})$.

8. Le cas des feuilletages à classe canonique (numériquement) triviale

Soit $\mathcal{F}$ une distribution de codimension 1 sur une variété Kähler compacte M ($dim_{\mathbb{C}} M = n$). On considère le fibré déterminant associé

$$det\ \mathcal{F} = (\bigwedge^{n-1} T_{\mathcal{F}})^{**}$$

qu'on peut donc voir comme sous faisceau inversible de $\bigwedge^{n-1} T_M$.

On supposera en outre que

(*) on a la condition de trivialité numérique

$$c_1(\mathcal{F}) := c_1(det\ \mathcal{F}) = 0$$

(**)le fibré canonique K_M est pseudo-effectif.

Par adjonction, on obtient que

$$K_M = (det\ \mathcal{F})^* \otimes {N_{\mathcal{F}}}^*$$

en conséquence de quoi le conormal ${N_{\mathcal{F}}}^*$ est numériquement équivalent à K_M et est donc *pseudo-effectif*. En réinvoquant le théorème 1.1, on peut conclure que $\mathcal{F}$ est intégrable. On désignera encore par $\mathcal{F}$ le feuilletage de codimension 1 associé. Il s'agit donc d'une sous classe de la famille de feuilletages considérés dans cet article ; lorsque $\mathcal{F}$ est régulier on obtient dans [19] une classification essentiellement complète (pour faire bref, $\mathcal{F}$ provient, à revêtement fini près, d'un feuilletage linéaire sur le tore ou est une fibration isotriviale).

Comme l'indique le théorème ci-dessous, cette situation est en fait générale.

Théorème 6. *Sous les hypothèses ci-dessus, le feuilletage $\mathcal{F}$ est nécessairement régulier.* [2]

Démonstration. Utilisons la forme positive $\eta_T = ie^{2\varphi}\omega \wedge \overline{\omega}$ introduite en section 1 (formule (2)).

On rappelle que η_T est fermée (au sens des courants) et permet donc de produire par dualité de Poincaré-Serre une classe non triviale $\{\beta\} \in H^{1,1}(M)$. Remarquons qu'on hérite par ailleurs d'une décomposition globale naturelle

$$\eta_T = \alpha_1 \wedge \alpha_2$$

où $\alpha_1 = \omega$, $\alpha_2 = -ie^{2\varphi}\overline{\omega}$ vus respectivement comme $(1,0)$ forme à valeur dans $N_{\mathcal{F}}$ et courant de bidegré $(0,1)$ à valeurs dans $N_{\mathcal{F}}^*$ (qui s'interprète comme forme linéaire continue sur les $(n, n-1)$ formes à valeurs dans $N_{\mathcal{F}}$).

On constate que α_1 et α_2 sont $\overline{\partial}$ fermées (c'est évident pour α_1 et résulte par exemple de la formule (3) pour α_2). Elles induisent donc, puisque η_T est non nulle en cohomologie, des classes non triviales $\{\alpha_1\} \in H^{1,0}_{\overline{\partial}}(N_{\mathcal{F}})$, $\{\alpha_2\} \in H^{0,1}_{\overline{\partial}}(N_{\mathcal{F}}^*)$,

2. Sous les hypothèses numériques (*) et (**), ce résultat persiste en fait pour des distributions de codimension quelconque ([13])

Plus précisément, le cup produit

$$\{\alpha_1\}\{\alpha_2\}\{\beta\} \in H^{n,n}_{\overline{\partial}}(M)$$

est non nul (il coïncide en effet avec $\{\eta_T \wedge \{\beta\})$.

Le théorème résulte alors d'un simple jeu de réécriture ; en notant c la classe de $\alpha_1 \wedge \beta$ dans $H^{0,n-1}_{\overline{\partial}}(N_{\mathcal{F}} \otimes K_M*)$, on obtient que

$$\{\alpha_2\}c \neq 0$$

Par suite, on a nécessairement

$$\alpha_2 \wedge \tilde{c} \neq 0$$

où $\tilde{c} \in \Omega^{(0,n-1)}(E)$ est une forme lisse de bidegré $(o, n-1)$ à valeurs dans le fibré $E = N_{\mathcal{F}} \otimes K_M*$ représentant c.

D'après la formule d'ajonction précédente, on peut munir E d'une métrique qui en fait *un fibré en droites hermitien plat.*

Relativement à cette métrique (et une métrique kählerienne fixée sur M), on peut choisir $\tilde{c}$ *harmonique* Dans ce cas, par symétrie de Hodge, la forme conjuguée $\Omega := \overline{\tilde{c}}$ est *holomorphe* et $\omega \wedge \Omega$ donne lieu à une section *non nulle* de $N_{\mathcal{F}} \otimes K_M \otimes E^* = \mathcal{O}_M$.

Cette section ne peut donc avoir de diviseur de zéros sur M, ce qui n'est visiblement possible que si $\mathcal{F}$ est en fait régulier. □

Remarque 8.1. *On pourrait plus généralement remplacer (*) par l'hypothèse det $\mathcal{F}$ pseudo-effectif (ce qui est donc le cas pour $N^*_{\mathcal{F}}$)) ; lorsque M est projective et det $\mathcal{F}$ n'est pas (numériquement) trivial, des résultats de Miyaoka (voir par exemple* [18]*) garantissent que M est uniréglée, ce qui est bien sûr incompatible avec l'hypothèse (**). Nous pensons que ce type d'obtruction persiste en kählerien mais nous ne connaissons pas de preuves.*

Références

[1] L.ALESSANDRINI, G.BASSANELLI, *Plurisubharmonic currents and their extension across analytic subsets*, Forum Math., t. **5** (1993), pp. 577 ?602.

[2] S.BOUCKSOM, *Divisorial Zariski decompositions on compact complex manifolds*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **37** (2004), no. 1, 45-76.

[3] M.BRUNELLA, Feuilletages holomorphes sur les surfaces complexes compactes, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **30** (1997), no. 5, 569-594.

[4] M.BRUNELLA, Courbes entières et feuilletages holomorphes, Enseign. Math. (2) **45** (1999), no. 1-2, 195-216.

[5] M.BRUNELLA, J.V PEREIRA, F.TOUZET, *Kähler manifolds with split tangent bundle*, Bull. Soc. Math. France **134** (2006), no. 2, 241-252.

[6] D.CERVEAU, J.-F. MATTEI, *Formes intégrables holomorphes singulières* Astérisque, **97** Société Mathématique de France, Paris, 1982. 193 pp.

[7] S.D.CUTKOSKY, *Zariski decomposition of divisors on algebraic varieties* Duke Math. J. **53** (1986) 149-156.

[8] J.P DEMAILLY, *On the Frobenius integrability of certain holomorphic p-forms*, Complex geometry (Göttingen, 2000), 93-98, Springer, Berlin, 2002.

[9] T-C DINH,N SIBONY, *Groupes commutatifs d'automorphismes d'une variété kählérienne compacte*, Duke Math. J. **123** (2004), no. 2, 311-328.

[10] C.GODBILLON, Claude, *Feuilletages. Études géométriques* Progress in Mathematics, 98. Birkhäuser Verlag, Basel, 1991.

[11] L.HÖRMANDER, *The analysis of linear partial differential operators. I. Distribution theory and Fourier analysis*, Classics in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 2003.

[12] F.LORAY, *Pseudo-groupe d'une singularité de feuilletage holomorphe en dimension deux*, Prépublication IRMAR (2005).

[13] F.LORAY, J.V PEREIRA, F.TOUZET, *Codimension one foliations of low degree*, travail en cours.

[14] P.MOLINO, *Riemannian foliations*, Translated from the French by Grant Cairns. With appendices by Cairns, Y. Carrière, É. Ghys, E. Salem and V. Sergiescu. Progress in Mathematics, **73.** Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1988, 339 pp.

[15] E.PAUL,*Feuilletages holomorphes singuliers à holonomie résoluble*, J. Reine Angew. Math. **514** (1999), 9-70.

[16] M.REID, *Bogomolov's theorem* $c_1^2 \leq 4c_2$ Proceedings of the International Symposium on Algebraic Geometry (Kyoto Univ., Kyoto, 1977), pp. 623 ?642, Kinokuniya Book Store, Tokyo, 1978.

[17] B L.REINHART,*Foliated manifolds with bundle-like metrics* Ann. of Math. (2) 69 1959 119-132.

[18] N.SHEPHERD-BARRON,*Miyaoka's theorems on the generic seminegativity of* T_X *and on the kodaira dimension of minimal regular threefolds,* J.KOLLÁR ET AL, *Flips and abundance for algebraic threefolds*, Astérisque **211** (1993)

[19] F.TOUZET, *Feuilletages holomorphes de codimension 1 dont la classe canonique est triviale*, Ann. Sci. École Norm. Sup. **41**, (2008) 1-14.